PENSAMIENTO. Papeles de filosofía,
issn: 1870-6304, Nueva época, año 2, número 3, enero-junio de 2016,
pp. 31-61

La crítica de Frege a las ideas aritméticas de Locke

Frege's Critique of Locke's Arithmetical Ideas

Andrés Fernando Stisman*

Recepción: 17/04/16
Aprobación: 18/08/16
Reenvío: 22/08/16

Resumen: El propósito del trabajo es analizar la crítica de Frege a las posiciones que Locke sostenía sobre la aritmética. Si bien es cierto que las referencias explicitas al pensador inglés son muy escasas, las tesis de Locke se encuentran presentes en diferentes pensadores con los que el filósofo alemán polemiza. Los ejes del debate son: 1) el rechazo al abordaje del número en términos de representaciones, 2) el ataque a la identificación del número 1 con la unidad y de los restantes números con un conjunto de unidades y 3) la objeción a la concepción del número como una entidad abstracta.

El artículo pone particular énfasis en el carácter lingüístico de muchas de las críticas fregeanas.

Palabras claves: Número, Representación, Unidad, Abstracción, Conjunto.

Abstract: *The purpose of this paper is to analyze the criticism posed by Frege against the position about arithmetic held by Locke. Though it is true the explicit references mentioned by the English philosopher are scarse, Locke´s thesis are present in various thinkers with whom the German philosopher polemicizes. The focal points of the debate are: 1) the rejection of the approach of the number in terms of representations, 2) the assail to the identifications of number 1 with the unit and of the remaining numbers with a set of units and 3) the dissent to the conception of the number as an abstract entity.*

This article places special emphasis on the linguistic condition of much of the criticism proposed by Frege.

Keywords: *Number, Representation, Unit, Abstraction, Set.*

* Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional de Tucumán, andres.stisman@filo.unt.edu.ar

Introducción

En 1884 Frege publica *Los fundamentos de la aritmética*, obra en la que, además de intentar mostrar de manera un tanto informal su tesis logicista, critica y polemiza con diversas corrientes sobre la índole de los números y las proposiciones aritméticas; una de ellas es el empirismo. Si bien es cierto que hace muy escasas las referencias explícitas a pensadores modernos como Locke, Berkeley o Hume, ellos están presentes a través de las posiciones que tienen aquellos a los que el filósofo alemán ataca. Este trabajo exhibirá de qué forma las tesis que Locke posee sobre los números y la aritmética pueden encontrarse, en ocasiones con diferencias de matiz, en filósofos y matemáticos con los que Frege discute. Esto servirá para poner en evidencia la influencia de las ideas del filósofo inglés en ciertas corrientes del siglo XIX y, especialmente, para examinar una de las facetas de un diálogo muy escasamente explorado en la literatura filosófica actual: el que mantiene el autor de *Conceptografía*, a través de mediaciones, con la tradición moderna.

El trabajo pretende centrarse en el análisis de la crítica fregeana a las concepciones de la aritmética abiertas por Locke y poner especial énfasis en el carácter lingüístico de muchos de sus ataques.

1. La aritmética según Locke

1. A. *Los números*

Aunque Locke no desarrolla sistemáticamente una filosofía de la aritmética, aborda temas de los que se ocupa.

En la segunda parte del *Ensayo sobre el entendimiento humano*, el filósofo inglés habla de los números y, al explicar la naturaleza de las cualidades primarias, expresa que estas se hallan en los cuerpos y producen las ideas de solidez, extensión, forma, movimiento, reposo y número. El número es analizado desde dos facetas:

1) Ontológica, pues es una cualidad primaria y está en los cuerpos mismos.

2) Psicológica, porque se tiene la idea de número.

Seguramente, debido a su representacionalismo, Locke se centra particularmente en el segundo aspecto e investiga detenidamente la índole de las representaciones numéricas.

El tratamiento de la idea de número comienza con la indagación de la idea de unidad. Sobre ella expresa:

> Entre todas las ideas que tenemos, como ninguna es sugerida a la mente mediante otra vía que la idea de unidad o de uno, ninguna hay, por tanto, que sea más simple que ésta. Esta idea no tiene ni sombra de variedad o composición en ella; todo objeto en el que se emplean nuestros sentidos; toda idea que hay en nuestro entendimiento; todo pensamiento de nuestra mente, nos trae esta idea. Y, por lo tanto, es la más íntima en nuestros pensamientos al igual que es, por su acuerdo con todas las demás cosas, la idea más universal que tenemos. Porque el número se aplica a los hombres, a los ángeles, a las acciones y a los pensamientos y a todo lo que pueda existir e imaginarse (Locke, 1956, p. 189).

En este rico pasaje se condensan varias e importantes tesis, cuyo análisis realizo a continuación. Lo primero que se advierte es que el autor equipara la idea de unidad con la idea del número 1. Esta identificación —que no resulta trivial— es objeto de múltiples críticas, entre ellas —como se advertirá más adelante— la de Frege.

La idea de unidad se presenta como una idea simple que proviene de la sensación y de la reflexión, además viene acompañada de toda representación. Cada vez que alguien se representa algo lo concibe como uno. De allí su universalidad.

Un asunto que no resulta obvio es la simplicidad que le atribuye. Robles (1993) señala que pareciera subyacer en las expresiones de Locke la concepción de que toda idea universal debe ser simple. El argumento presentado por el intérprete es el siguiente: una idea A puede ser atributo de una idea B, así, la idea de felino es un atributo de la idea de tigre. Ahora bien, si la idea A es un atributo de la idea B,[1] entonces, A debe ser tan o más simple que B; por ejemplo, la idea de felino es más simple que la de tigre puesto que posee menores determinaciones.

[1] Una idea A es un atributo de una idea B si todos los rasgos contenidos en la primera son también rasgos de la segunda.

Ahora bien, si la idea de unidad acompaña a todas las ideas, incluso a las más simples que se puedan considerar, ella misma debe ser simple.

El resto de los números se conciben meramente como una combinación de unidades:

> De esta manera, adicionando uno a uno, adquirimos la idea compleja de par; poniendo doce unidades juntas llegamos a la idea compleja de una docena; y de la misma manera llegamos a las ideas complejas de una veintena, un millón o cualquier otro número (Locke, 1956, p. 189).

Locke señala que una de las maneras más notables en que se distinguen las ideas de los diversos números es la nitidez con la que se advierte la diferencia entre ideas de números distintos. El número 1 se percibe como distinto de todos los demás números naturales, ya sean números pequeños (como el 2) o enormes y muy lejanos a él. En cambio, no ocurre lo mismo con los múltiples matices de blanco o con las pequeñas variaciones en la extensión; la mente tiene muchas dificultades para reconocer la diferencia que hay entre un determinado tipo de blanco y un matiz apenas distinguible de él, o entre una superficie de cuatro metros cuadrados y otra con un milímetro más.

La tesis de que todos los números son distinguibles entre sí muestra serias limitaciones cuando se consideran números grandes. Evidentemente, es posible representarse una unidad, luego dos o tres, y advertir nítidamente la diferencia entre ellas. Ahora bien, si un sujeto tiene ante sí dos conjuntos o si se los tiene que imaginar, uno de mil manzanas y otro de mil y una manzanas, seguramente no podría captar diferencia alguna. El autor advierte este tipo de dificultades; agudamente señala que la distinción entre todos los números solo es posible con el auxilio del lenguaje. Son las diferencias que hay entre los términos las que permiten distinguir las que poseen los números; sin signos numéricos la discriminación quedaría acotada a números muy bajos.[2]

---

[2] Para reforzar esta tesis, Locke apela en el *Ensayo* a dos hechos:
1) En pueblos escasamente civilizados, en los que el lenguaje no permite contar hasta mil, sus habitantes no tienen una idea distinta de ese número.
2) Sea el siguiente número: 857324 nonillones 162486 octillones 345555896 septillones 437918 sextillones 423147 quintillones 248106 cuatrillones 235421 trillones 261734 billones 368149 millones 6231137 unidades. El filósofo señala que es posible nombrar este número mediante la repetición de millones (millones de millones de millones de millones, etc.).

1. B. *Aritmética, abstracción y generalidad*

En la cuarta parte del *Ensayo* se pueden encontrar algunas afirmaciones que permiten reconstruir la perspectiva de Locke acerca de la naturaleza del conocimiento matemático.

Para comenzar, conviene recordar que para el filósofo solo se conocen ideas y que el origen de las mismas es empírico. Los objetos del conocimiento aritmético son también ideas y estas, como todas las otras, se derivan de la experiencia.

Uno de los mayores desafíos del empirismo es explicar el origen sensible del conocimiento matemático y, a su vez, su carácter universal. Barceló Aspeitia (2005) sostiene que Locke lo hace a través de la postulación de ideas abstractas. Efectivamente, el autor del *Ensayo* pone en relación la universalidad del conocimiento con el carácter abstracto de las ideas sobre el que versa:

> Si las ideas cuyo acuerdo o desacuerdo percibimos son abstractas nuestro conocimiento es universal. Pues lo que se sepa de tales ideas generales será verdadero de cada cosa particular en la que se encuentre esa esencia, es decir, esa idea abstracta; y lo que se sepa de tales ideas será verdadero perpetuamente y por siempre. Así que todo conocimiento general deberá buscarse y encontrarse únicamente en nuestra propia mente (Locke, 1965, p. 553).

Que Locke considera que los matemáticos trabajan con ideas abstractas puede verse no solo en el hecho de que para el filósofo el conocimiento matemático es universal,[3] sino también en que uno de los apartados que se encuentran en la cuarta parte del *Ensayo* se titula "La existencia no es un requisito para que el conocimiento abstracto sea real" y los primeros ejemplos que se perfilan allí para probar lo dicho son matemáticos: "… la cuadratura del círculo […] las relaciones cónicas o […] cualquier otra parte de las matemáticas que nada tienen que ver con la existencia de esas figuras" (Locke, 1956, p. 553).

Sin embargo, es la discriminación lingüística entre nonillones, octillones, septillones, etc., la que permite la diferenciación conceptual.

3 "En la idea de un triángulo, ¿es cierto que sus dos ángulos son iguales a dos rectos? En caso afirmativo, también será cierto de un triángulo donde quiera que exista" (Locke, 1956, p. 556).

Nada dice explícitamente Locke sobre el carácter abstracto de las ideas de los distintos números. En este sentido, su filosofía plantea algunas tensiones. Por un lado, el inglés expresa que la idea de unidad —y por tanto la idea de número 1— es simple. Una de las características de las ideas simples es la pasividad con las que el sujeto las recibe. Visto el asunto desde esta perspectiva, la idea de unidad no puede ser abstracta, pues la abstracción es una operación de la mente; sin embargo, por otro lado, Locke —como mostré— vincula explícitamente la universalidad del conocimiento con el carácter abstracto de las ideas sobre las que versa. Me parece en extremo improbable que el filósofo inglés considere que haya conocimientos universales y que no incluya entre ellos los de la aritmética; si lo hiciese, debería considerar que las ideas de números son producto de la abstracción.

Además, Locke afirma que la idea de unidad acompaña a todas las ideas, entonces podría pensarse, aunque el autor del *Ensayo* no lo manifieste explícitamente, que se puede obtener la mera idea de unidad —equiparable a la idea de número 1— separando lo que las ideas de esos objetos particulares tienen en común.

Más allá de si Locke piensa o no que las ideas de unidad y los restantes números son abstractos, interesa destacar una perspectiva que se abre a partir de su propio análisis del número en términos de representaciones.

2. El ataque fregeano a las tesis de Locke

Las ocasiones en las que Frege hace alusiones explícitas a Locke son contadas; sin embargo, algunas de las ideas de este último ya se encontraban en Euclides, con quien el filósofo alemán discute, incluso reaparecen con fuerza en diferentes pensadores del siglo XIX con los que entra en polémica. Esto no implica que la influencia del filósofo inglés sobre estos últimos sea asumida como tal ni que se haya realizado sin modificaciones, pero sí —como iré mostrando— que puede apreciarse la impronta de Locke en diversas posiciones propias de la época atacadas por Frege.

Frege va a objetar cada uno de los puntos expuestos, que son tributarios de la filosofía de Locke: 1) Que el número pueda analizarse como una representación. 2) Que esta consista o bien en la idea de unidad —que se identifica con el número 1— o bien en el conjunto de repetidas apariciones de esa idea –desde el número 2 en adelante–. 3) Que el número sea una representación abstracta. Dedico cada uno de los apartados siguientes al examen de la crítica de estos aspectos. Analizaré cómo la visión lockeana de la aritmética se presenta en diversos pensadores y las razones por las que Frege la rechaza; a su vez, mostraré cuán imbricadas están las consideraciones del filósofo alemán sobre los números y las proposiciones de la aritmética con sus posiciones sobre el lenguaje.

2. A. *La objeción al análisis de los números como representaciones*

En el siglo XIX la idea de que todas las ciencias se subsumen a la psicología tenía amplia aceptación. En ese contexto no es de extrañar la gran cantidad de matemáticos y filósofos que entienden, como Locke, que el número puede examinarse como una representación, ya sea sensible o abstracta. Algunos de ellos son citados expresamente por Frege. Bauman (en Frege, 1996) sostiene: "Uno es lo que concebimos como uno" (p. 75). Schlömich[4] dice que el número es la imagen del lugar de un objeto en una serie. Hankel concibe el número en términos de pensar o poner un objeto múltiples veces.[5]

En este marco cabe mencionar el libro de Husserl, *Filosofía de la aritmética*, publicado en 1891. Esta referencia es ineludible por tres razones: 1) Aunque Husserl (2003) pretende superar el empirismo clásico y ciertas formas de psicologismo vigentes, en aquel libro expresa, en consonancia con las tesis empiristas, lo siguiente: "Ningún concepto puede ser pensado sin fundamento en la intuición concreta" (p. 83). 2) Realiza en esta etapa un análisis psicológico, genético, del concepto de número. 3) La reseña del texto de Husserl que Frege realiza en 1894 es una de las piezas para el análisis de las cuestiones que estoy abordando.

Cabe aclarar que no es mi propósito hacer una exégesis de *Filosofía de la aritmética*, sino centrarme en la manera en que Frege lo entiende

---

4 Las afirmaciones de Schlömich y Hankel también son aludidas por Frege en *Los fundamentos de la aritmética*.

5 Es importante advertir que las caracterizaciones del número realizadas por los autores a los que Frege menciona difieren en que, en algunos casos –como por ejemplo el de Hankel–, lo que se considera son los cardinales y, en otros –como el de Schlömich–, los ordinales.

y mostrar su divergencia con algunos puntos de vista que encuentran sus raíces en Locke.

Husserl comienza su libro recordando la definición euclidiana de "número" como una multiplicidad de unidades. Realiza un análisis psicológico –de igual forma que Locke– sobre el origen del concepto de multiplicidad y señala que los contenidos que se manifiestan en primera instancia a la conciencia son las representaciones. Si bien es cierto que se puede tener representaciones de objetos aislados (una casa, un árbol, una persona, etc.), también es posible representarse las cosas conjuntamente. En relación a esto indica:

> Si nos preguntamos en qué consiste la unión cuando pensamos, por ejemplo, una pluralidad de cosas tan dispares como el rojo, la luna y Napoleón, obtenemos por respuesta que ella consiste simplemente en que pensamos en conjunto esos contenidos, que los pensamos en un solo acto (Husserl, 2003, p. 77).

El enlace es un acto psíquico, externo al contenido de las representaciones enlazadas; cuando se produce la unión, cada objeto es considerado como un "algo" o un "uno". De la determinación de cuántos "algos" o "unos" hay, se obtiene –al igual que lo concibe Locke– el concepto de número.[6]

Husserl no desconoce –como no lo hace el filósofo inglés– que, entender a los números como multiplicidades, por un lado, y considerar a estas en términos de representaciones, por el otro, tiene la dificultad de que la capacidad representativa del sujeto es limitada.[7] A fin de resolver este problema apela a una distinción de su maestro Brentano: las representaciones propias (intuitivas o llenas) e impropias (simbólicas o vacías). Sobre las últimas dice:

> Una representación *simbólica* o *impropia* es, como la palabra lo dice ya, una representación por signos. Si un contenido no nos es dado directamente

[6] "… el concepto de multiplicidad inmediatamente se divide en una colección de conceptos determinados […]: los números. Surgen conceptos tales como: *uno y uno; uno, uno y uno; uno, uno, uno, y uno*, y así sucesivamente" (Husserl, 2003, p. 85).

[7] "Sólo bajo condiciones especialmente favorables podemos representarnos auténticamente multiplicidades concretas de aproximadamente una docena de elementos" (Husserl, 2003, p. 202).

> como lo que él es, sino sólo indirectamente *por signos que lo caracterizan unívocamente*, entonces, en lugar de una representación propia, tenemos una representación simbólica de él (Husserl, 2003, p. 205).

A fin de aclarar esta idea, Husserl (2003) toma como ejemplo la representación de una casa: si se ve directamente se tiene una representación propia de ella; si se caracteriza por medio de signos, una impropia. La representación simbólica es un sustituto permanente o provisorio de la propia y es equivalente a ella desde un punto de vista lógico, es decir, se puede sustituir una por otra. Para el pensador, la aritmética necesita del auxilio de los signos del lenguaje. Me parece ineludible en este punto remarcar la íntima conexión que este planteamiento tiene con el de Locke. Recuérdese que el pensador inglés advierte que la discriminación entre conjuntos de unidades se realiza sin problemas solo cuando se trata de cantidades muy pequeñas, para más grandes es indispensable la diferenciación lingüística.

Para explicar la formación de representaciones simbólicas en el ámbito del número, Husserl (2003) apela a la noción de momento figural. El filósofo expresa que generalmente se intuyen multiplicidades sin que por ello se aprehenda cada uno de los objetos que la integran. Así, se puede entrar a una sala y juzgar que hay una multiplicidad de hombres, u observar el jardín y decir que hay muchas hojas en el suelo. A fin de dar cuenta de la posibilidad de estos hechos sostiene: "En la intuición de la multiplicidad sensible debe haber *signos indicativos inmediatamente captados*, gracias a los cuales se pueda reconocer el carácter de multiplicidad [...] A tales signos indicativos podrían también asociarse inmediatamente el nombre y el concepto de multiplicidad" (Husserl, 2003, p. 213).

Estos signos –que no tienen que ver con los contenidos de la representación, sino con la manera en que se configuran, se fusionan– son los denominados *momentos figurales*. La constitución intrínseca o momento figural de ciertas multiplicidades hace que puedan ser aprehendidas con una sola mirada y juzgadas, por ejemplo, como una columna de soldados, una fila de árboles o un montón de miel. Como señala María Mercedes Risco (2012), los momentos figurales constituyen el contenido psicológico que permite que el acto psíquico se refiera a una multiplicidad en tanto tal y, por ello, hacen posibles las representaciones simbólicas de multiplicidades concretas. La multiplicidad, en tanto que multiplicidad, es un dato de la experiencia.

Volviendo a Frege (1996), cabe señalar que ataca la idea de que el número es una representación, de esta se ocupa la psicología, de los números la aritmética: "la aritmética no tiene nada que ver con las sensaciones. Tampoco con representaciones internas que se han formado a partir de las huellas de las impresiones sensoriales anteriores" (p. 35), "el número es un objeto de la psicología o un resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser el mar del norte" (p. 69).

Varias de las críticas que realiza se dirigen contra la tesis de que el número es una representación de tipo sensible. Algunos argumentos tienen que ver con la diferencia cualitativa entre las representaciones y los números, otros con consecuencias contraintuitivas o absurdas a las que se arribaría en caso de aceptar la identificación entre ellos.

El filósofo indica que los números no son representaciones sensibles debido a que no poseen la determinación de los primeros (Frege, 1996). Los números son entidades delimitadas, en tanto que las representaciones son indeterminadas, imprecisas. Si la aritmética se fundase en las sensaciones –indica– sería tan confusa como su base. La determinación y precisión de las matemáticas es un supuesto al que Frege no está dispuesto a renunciar y desde el cual evalúa críticamente la identificación del número con las representaciones.

Por otra parte, de aceptarse que el número 2, por ejemplo, sea una imagen, cada uno tendría su representación del dos, con lo cual habría "millones de doses"; en tal caso, debería decirse "mi dos, tu dos, un dos, todos los doses" (Frege, 1996, p. 72).

Frege (1996) señala –en concordancia con varias propuestas empiristas– que pareciera que los hombres no pueden pensar sin imágenes; sin embargo, la relación entre estas y lo efectivamente pensado es –contrariamente a lo que consideran los empiristas– "externa, arbitraria y convencional" (p. 102). Así, con la palabra "cien" los individuos pueden imaginarse muchas cosas distintas, uno puede representarse el signo "100", otro la letra "C" o cualquier otra cosa; sin embargo, ninguna de estas imágenes tiene algo que concierna al número en cuestión, ninguna propiedad del número cien podrá encontrarse en ellas.

A fin de mostrar que no hay nada en las representaciones sensibles que se corresponda con el número, apela, entre otras cosas, al análisis que realiza Bauman sobre el número 1, quien lo identifica –de la misma manera que Locke– con la unidad. Para Bauman, a lo que se le atribuye "la propiedad 'un'" se caracteriza por la indivisión y la delimitación. Frege (1996) expresa que si el número uno consistiese en esto, entonces los animales deberían tener "cierta imagen" del número 1 –o de unidad–, pero esto no parece probable:

> ¿Puede un perro, al contemplar la luna, tener una imagen por vaga que sea, de lo que nosotros designamos con la palabra "un"? ¡Difícilmente! Y, sin embargo, distingue ciertamente objetos singulares: otro perro, su amo, una piedra con la que juega se le aparecen, sin duda, tan delimitados, tan consistentes por sí mismos, tan indivisos como lo son para nosotros. Es verdad que notará una diferencia entre tener que defenderse contra muchos perros o bien sólo contra uno, pero esto es lo que Mill llama diferencia física. De lo que se trata aquí es de si puede tener conciencia, por oscura que sea, de lo que es común a lo que expresamos con la palabra "un"; por ejemplo, en los casos en que es mordido por *un* perro y en que persigue *un* gato. Esto parece improbable (p. 76).

De aquí Frege deduce que no es verdad –como afirma Locke–[8] que la idea de uno (o unidad) se obtenga a partir del trato empírico con los objetos exteriores a través de la mediación de las representaciones.

La tesis de que ninguna imagen sensible posee nada que se corresponda al número se extiende al tratamiento de otros ejemplos. Así, sostiene que se puede tener la falsa creencia de que ciertas representaciones sensibles son el correlato de los signos numéricos; por ejemplo, que en la imagen de los cuatro puntos de un dado se encuentra lo que se corresponde con la palabra "cuatro" (Frege, 1996). El error de esta tesis se puede ver en una situación como la que expongo a continuación. Frege pide al lector que piense en un prado verde (*eine grüne Wiese*) y que vea qué pasa cuando se sustituye el artículo indeterminado "*eine*" por el numeral "*ein*" (*ein grüne Wiese*). La imagen no sufrirá ninguna

[8] La referencia a Locke es en esta ocasión explícita.

alteración; sin embargo, a la palabra "verde" sí le corresponde algo en la imagen; la misma cambiaría, por ejemplo, si se sustituye "verde" por "marrón". De igual forma, es posible imaginarse la palabra "oro" sin pensar en ningún número. Ante la pregunta: "¿cuántas letras tiene la palabra?", se advertiría que son tres, pero nada cambiaría en la representación. Por otra parte, si hubiese algo en las imágenes que se correspondiese con los números, cabría preguntarse —manifiesta— en qué imagen puede encontrarse algo que se corresponda con el cero, por ejemplo, en la expresión "cero estrellas". Es verdad —dice— que es posible imaginarse el cielo totalmente cubierto de nubes, pero en este caso no hay nada que se corresponda con la palabra "estrella" y nada que se corresponda con la palabra "cero". Por otra parte, si el número fuese una imagen sensible, no se podría dar cuenta de los números grandes, y "… quizá 10 sería sólo un signo vacío y no habría en ningún ser alguna imagen que pudiera designarse así" (Frege, 1996, p. 26).

Cuando Husserl escribió *Filosofía de la aritmética* ya había leído *Los fundamentos de la aritmética*. La tesis de las representaciones simbólicas pretendía resolver la dificultad que genera la representación numérica; sin embargo, a Frege no le resulta convincente. Recuerda que Husserl decía que las representaciones simbólicas caracterizan unívocamente, mediante signos, lo que representan y ejemplificaba esto a través de la descripción de una casa. El problema —expresa— es que no se puede analogar la representación simbólica de una casa con la supuesta representación simbólica de un número elevado, porque la primera da cuenta de algo objetivo, la propia casa, de la que los sujetos se forman representaciones, pero no pareciera encontrarse nada objetivo de lo que el número sea una representación.

Lo que hace que la representación propia de una casa y la representación de ella a través de signos sean equivalentes —y por lo tanto mutuamente sustituibles— es que ambas remiten al mismo objeto; sin embargo, esta explicación no es legítima para dar cuenta de las hipotéticas representaciones simbólicas de los números, porque en la mayoría de los casos, ni siquiera se dispone de representaciones propias. Frege expresa que, para Husserl, la forma de obtener representaciones simbólicas —ante la ausencia de representaciones propias— es idealizando las capacidades de representación.[9] Así, los sujetos no pueden, en general, imaginarse quince elementos, pero sí tener una representación simbólica por medio del signo "15", imaginando que representan un conjunto que tiene los elementos de dos conjuntos: aquel al que le corresponde el número 5 y al que le cabe el número 10. En este caso –indica–, en las representaciones simbólicas entran las representaciones de los signos: "Aquí los signos sensibles no son a la manera de los símbolos lingüísticos, meros acompañantes de los conceptos. Participan de nuestras construcciones simbólicas de un modo mucho más destacado […] Tan destacado que, al final, dominan todo el campo" (Valdés Villanueva, 1998, p. 255). El problema del anclaje del número en el signo numérico, sostiene Frege, es que se llegaría a la consecuencia absurda de que los números cambiarían conforme se modifiquen los signos.

Ahora bien, pienso que una posible defensa de la tesis de que el número es una representación, podría ser la siguiente: es verdad que si el número consistiese en una representación sensible no habría un dos, sino múltiples doses, cada sujeto tendría una imagen distinta; sin embargo, este problema desaparecería si se presenta al número como una representación abstracta idéntica en los diferentes sujetos por lo que respecta a sus propiedades. Este es, aparentemente, el camino lockeano; no obstante, como bien advierte Dummett (1991), esta salida no es viable para Frege, dado el carácter personal intransferible e incontrastable de toda representación. En 2. C veré, además, la crítica al abstraccionismo insinuado en posiciones como la lockeana.

Una cuestión que surge es qué explicación da Frege de las razones que han hecho que tenga tan amplia aceptación la tesis de que el número es una representación. Para el filósofo es, en definitiva, una consecuencia de supuestos, tanto ontológicos como semánticos:

1) La identificación de lo objetivo con lo real. Si se cree que lo objetivo se agota en lo concreto y no se considera que los números

[9] Efectivamente, Husserl (2003) hace referencia a la capacidad de idealización: "Es perfectamente concebible una ampliación de la capacidad de representación que la pondría en posición de captar, de manera colectiva, los grupos de cien, mil o un millón de elementos en una vinculación genuina […] Esa intención (la de la representación simbólica de grandes grupos) tiende a la representación real de las colecciones, las que, si no están dentro de nuestro alcance, entran, sin embargo, dentro de una capacidad idealizada del conocimiento humano" (p. 231), "… podemos, a través de la idealización, ignorar estas limitaciones de nuestras habilidades… " (p. 236).

sean ni objetos concretos ni sus propiedades, se los confina a los estados de conciencia (Frege, 1964).

2) Una concepción equivocada del lenguaje. El segundo principio metodológico propuesto en *Los fundamentos de la aritmética* expresa que debe buscarse el significado de las palabras en el contexto de todo el enunciado, no en las palabras aisladas. Frege (1996) expresa que si no se lo tiene en cuenta "uno se ve casi forzado a tomar por significados de las palabras representaciones internas o actos de la mente individual" (p. 38). Según Kenny (1995), lo que el filósofo quiere decir con esto es que si se busca qué le corresponde a cada palabra y no se encuentra nada externo −como en el caso del número o el infinito− se buscará algo interno. La filosofía de la aritmética de cuño psicologista como la lockeana es, pues, la consecuencia de una semántica que toma como mínimas unidades de análisis las palabras aisladas.[10] La verdadera índole de los signos numéricos, indica Frege (1996), no se devela buscando las representaciones que les corresponden, sino indagando en la naturaleza de los enunciados en los que aparecen.[11]

2. B. *El ataque a la concepción del 1 como unidad y de los restantes números como un conjunto de unidades*

La tesis lockeana de que la unidad y el número 1 se identifican y que los números superiores a 1 son conjuntos, combinaciones o multiplicidades de unidades o "unos", ha tenido predecesores y múltiples adherentes posteriores. Ya el filósofo nepolatónico Jámblico asignaba a Tales la definición del número como un "sistema de mónadas". Se supone, a su vez, que Tales la tomó de los egipcios. Euclides abre el libro VII de *Elementos* con estas definiciones: 1) Una unidad es aquello

---

10 Efectivamente, en Locke (1956) las mínimas unidades significativas son las ideas: "… el uso de las palabras consiste en que sean las señales sensibles de las ideas, y las ideas que se significan por aquéllas son su significación propia e inmediata" (p. 390). Todas las palabras son signos de las ideas, así, si los numerales han de ser significativos y no meros trazos, han de significar ideas.

11 Es relevante en este momento advertir que, para Frege, los números son objetos, los numerales son nombres de objetos y que el argumento al que apela para sostener esta tesis −que se verá en 3. B. 4− es de carácter lingüístico.

en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay se llama *uno.* 2) Un número es una pluralidad compuesta de unidades.[12]

Bolzano (en Tait, 1993) intenta caracterizar "multitudes finitas y numerables, o con bastante audacia: números" (p. 34). Husserl (2003) entiende, como mostré, las multiplicidades en términos de "uno y uno y uno". Hesse (en Frege, 1996) expresa: "Si podemos hacernos una imagen de la unidad, que en el álgebra viene expresada con el signo 1 [...] también podemos pensar una segunda unidad, igualmente justificada, y otras del mismo tipo. La reunión de la segunda con la primera, formando un todo, da el número 2" (p. 81). En los apartados siguientes me detendré en las críticas fregeanas a estas consideraciones.

2. B. 1. Ambigüedad definicional

Lo primero que se puede señalar es que Frege advierte acerca de la ambigüedad y vaguedad de los términos usados para caracterizar los números. En *Los fundamentos de la aritmética* expresa que para definirlos se han utilizado expresiones como "conjunto" (*Menge*), "multiplicidad" (*Vielheit*) o "pluralidad" (*Merheit*) que, a veces, se acercan a "montón" (*Haufe*), "grupo" (*Gruppe*) o "agregado" (*Aggregat*) –que sugieren yuxtaposición espacial–, pero en otras ocasiones equivalen a "número" (*Anzahl*). Tait (1993) manifiesta que –con la excepción de Bolzano– la literatura filosófica anterior a Cantor, Dedekind y Frege no precisa la noción de conjunto y tiende a subsumirla bajo nociones muy amplias, como las de multiplicidad o pluralidad, que incluyen realidades tan diferentes como el segmento de una línea, una persona, un montón de piedras o un rebaño de ovejas. Desde esta perspectiva, por ejemplo, Sócrates es uno, pero tiene muchas partes, el rebaño de diez ovejas incluye una pluralidad de veinte ojos o cuarenta patas. Todo está en función de las partes a ser numeradas.[13]

---

[12] La diferencia con Locke es que Euclides no piensa las unidades en términos de ideas, sino como objetos a ser contados.

[13] La posición de Frege (1996) sobre el contar es que se trata de una actividad que se realiza bajo un concepto: "Cuando frente al mismo fenómeno exterior puedo decir con igual verdad: 'esto es un grupo de árboles' y 'esto son cinco árboles', o bien 'aquí hay cuatro compañías' y 'aquí hay 500 hombres', en tal caso no se modifica ni lo individual ni la totalidad, el agregado, sino sólo mi denominación. Pero esto es síntoma de que he reemplazado un concepto por otro" (p. 90).

2. B. 2. Los números 0 y 1

Frege (1996) sostiene que la definición del número, en términos de conjuntos, multiplicidades o pluralidades de unidades, deja al 0 y al 1 fuera del dominio de los números. Esta cuestión reaparece en la reseña crítica del libro de Husserl, quien, en *Filosofía de la aritmética*, sostiene las dificultades que genera su caracterización del número en términos de multiplicidades y sostiene que 0 y 1 no son realmente números. Según Husserl, "cero" y "uno" son respuestas negativas a las preguntas "¿Cuántos?" ("No muchos", "ninguna multiplicidad"), "¿Cuándo?" ("Jamás"), "¿Dónde?" ("En ninguna parte"), "¿Qué?" ("Nada"). Frege ataca esta concepción de diversas formas. Expresa, por un lado, que debido a la vaguedad del término "multiplicidad" no hay razones para considerar que se tiene una multiplicidad y, por tanto, un número a partir del 2 y no con cantidades superiores. Por otro lado –afirma– no hay nada negativo en respuestas como "cero" o "uno". Si la pregunta fuese "¿Cuál es el número de predecesores de Rómulo en el trono de Roma?", no hay diferencia sustancial en afirmar "cero" o "dos". No hay nada negativo en ninguna de las dos respuestas. Si ante la pregunta "¿Quién era el predecesor de Rómulo en el trono romano?" se responde "Nadie", se está negando el predicado,[14] pero esto no ocurre cuando se dice "cero" o "uno".[15]

2. B. 3. Multiplicidades y conjunción

Para Husserl, los números son entendidos en términos de representaciones de multiplicidades que encuentran su manifestación mediante la conjunción "y" ("algo y algo y algo", o bien, "uno y uno y uno"). Idéntico planteamiento que el de Locke, quien los concibe como añadidos de unidades o "unos". A fin de analizar esto, Frege transforma un problema ontológico –qué es un número– en uno lingüístico: el sentido de las expresiones que contienen números. Indica que si fuese cierto

[14] "Nadie era el predecesor de Rómulo en el trono romano" equivale a "*a* no es el predecesor de Rómulo en el trono romano y *b* no es el predecesor de Rómulo en el trono romano y… y *n* no es el predecesor de Rómulo en el trono romano".

[15] Merece destacarse que, para Frege, las soluciones que se apoyen en el análisis de oraciones deben ser generales, es decir, valen para todas las oraciones de la misma forma.

que las proposiciones numéricas expresan multiplicidades expresables mediante la conjunción "y", entonces serían equivalentes a una sentencia de la forma "*a* y *b* y *c* y… *q* es *N*". Ahora bien, sea el enunciado: "Berlín, Dresde y Munich son tres" (1). Por ser un enunciado numérico debería afirmar lo mismo que "Berlín y Dresde y Munich son algo y algo y algo" (2); no obstante –afirma– esto no es verdad porque en (2) no se dice que Berlín, Dresde y Munich sean entidades distintas, por lo tanto, que sean tres. Bien podría ocurrir teóricamente –aunque no es efectivamente el caso– que se asevere (2) y que Berlín, Dresde y Munich sean la misma ciudad. Una prueba de que las sentencias que contienen la conjunción "y" no indican necesariamente que se habla de cosas diferentes, muestra el filósofo, es la legitimidad de la afirmación de Cristo "Yo *y* el Padre somos uno".

Otra objeción es la siguiente: Frege sostiene que para Husserl la "y" de "algo y algo y algo" es conjuntiva y no relacional, lo que implica que la totalidad –entendida como representación– no debe dar cuenta de la conexión entre los elementos, sino simplemente de su unión; sin embargo, señala:

> Para mí esto no es posible. No me puedo representar al mismo tiempo la rojez, la Luna y Napoleón sin representármelo en una unión; por ejemplo, la rojez de un pueblo en llamas sobre la que se recorta la figura de Napoleón, iluminada por la luna desde el lado derecho […] Sospecho que en mi alma simplemente no hay nada de lo que el autor llama "totalidad", "conjunto", "multiplicidad" (Valdés Villanueva, 1998, pp. 149-150).

2. B. 4. Igualdad y diferenciabilidad de las unidades

Otro argumento en contra de la tesis de que el número sea un conjunto, multiplicidad o pluralidad de unidades tiene que ver con la naturaleza de ellas. Quienes definen el número de esta forma optan por dos vías diferentes:

1) Considerar que las unidades son iguales. Frege (1996) cita como representantes de esta posición a Hobbes, a Hume –para quien los componentes del número son homogéneos– y a Carl Johannes Thomae.

2) Señalar que las unidades son diferentes. Ilustra esta tesis con citas de René Descartes, Schröder y Jevons, este último expresa:

> número es sólo otro nombre de diversidad. Identidad exacta es unidad, y con la diversidad surge la pluralidad [...] Se ha dicho frecuentemente que las unidades son unidades en la medida en que se parecen totalmente entre sí; pero si bien en algunos aspectos pueden ser totalmente semejantes, deben ser diferentes por lo menos en un punto; de lo contrario, no podrían formar una pluralidad (Frege, 1996, pp. 79-80).

Jevons afirma que, a fin de que la diferencia entre unidades quede plasmada en la notación, 5 es 1 + 1 + 1 + 1 + 1 podría manifestarse de esta forma: 1'+ 1''+ 1'''+ 1''''+ 1'''''. Frege (1996) advierte que ni de unidades diferentes ni de unidades iguales se obtiene el número. Si las unidades fuesen distintas, entonces se poseería un conjunto con objetos diferentes entre sí y eso no es un número; así, por ejemplo, tres manzanas no es el número 3. Además, si el número fuese un conjunto de unidades diferentes no se entiende −indica− qué sentido tiene el rodeo de subsumir las cosas bajo el concepto de unidad y definir al número como un conjunto de unidades y no simplemente como una colección de objetos. Todas las cosas pueden parecerse a otras en algún aspecto, el grado de semejanza es irrelevante si se trata de entidades diferentes, por ello, no hay razón para definir, como lo hace Jevons, "5" como "1'+ 1''+ 1'''+ 1''''+ 1''''' " y no sencillamente como "*a* + *b* + *c* + *d* + *e*". A su vez, si las unidades son distintas, y eso es necesario plasmarlo en la notación, habría infinidades de "unos", "doses", "treses", etc., porque si "3−2=1" es equivalente a " (1'+ 1''+ 1''') - (1''+ 1''')" = 1' ", entonces "(1'+1''+1''') - (1''''+1''''')" no sería equivalente a " 1' ". Si el número fuese una colección de entidades distintas, se tendría tantos números como conjuntos. Además, si las unidades son efectivamente distintas, no podría consignarse que "5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1" porque cosas diferentes deben señalarse a través de signos diferentes.

La otra posibilidad es que las unidades sean iguales. En vista de que los objetos son siempre diferentes entre sí, a la igualdad se llega a través de la abstracción. El problema es que si las unidades son absolutamente iguales no se obtiene una pluralidad. Así, "París y París y París" no expresa una multiplicidad sino un único objeto: París.

Husserl (2003), quien había leído *Los Fundamentos de la Aritmética* y la afirmación fregeana de que no se obtiene una pluralidad si las unidades son iguales, expresa:

> En cierto respecto se da ciertamente la igualdad, en otro la diferencia […] Sólo si la expresión "poner juntas cosas iguales", con la que se quiere describir el origen del número, exigiese igualdad absoluta −lo que Frege supone falsamente− produciría aquí una dificultad, o mejor, una imposibilidad (p. 155).

Frege advierte la contradicción de esta aseveración con otra que se encuentra en el mismo libro: "La igualdad de unidades […] es evidentemente absoluta. Ciertamente, el mero pensamiento de una aproximación ya es absurdo. Pues se trata de la igualdad de contenidos en relación con esto: que son contenidos" (Husserl, 2003, p. 158).

> La palabra "unidad" se adapta maravillosamente para ocultar esta dificultad […] Se empieza por llamar unidades a las cosas que hay que contar, con lo que la diversidad mantiene sus derechos; luego viene la reunión, agrupación, unión, anexión o como quiera llamarse, pasándose al concepto de la adición aritmética, y el término conceptual "unidad" se transforma, sin que lo advirtamos, en el nombre propio "uno". Con esto se consigue la igualdad. Si a la letra *u* añado una *n* y a ambas una *d*, cualquiera ve fácilmente que esto no es el número 3. Pero si pongo *u*, *n*, y *d* bajo el concepto "unidad", y en vez de "*u* y *n* y *d*" digo "una unidad y una unidad y otra unidad más" o "1 y 1 y 1", entonces es fácil creer que se ha obtenido 3. La dificultad se halla tan bien oculta por la palabra "unidad", que ciertamente sólo pocos hombres tienen idea que existe (pp. 83-84).

Esta trampa del lenguaje se hace objetiva en las definiciones de Euclides, porque si se analizan se podrá encontrar tres sentidos para "unidad" (μουαζ): 1) un objeto a ser contado, 2) una propiedad de tal objeto y 3) el número 1.

Desde esta perspectiva, Frege (1996) sostiene que una unidad es un objeto al que se le atribuye la propiedad "uno". Recuérdese que para Locke la idea de uno o unidad acompaña todas las representaciones, de allí su universalidad. El problema que tiene esta posición, indica Frege, es que sería sorprendente que todos los objetos tuviesen esta propiedad, e incomprensible el por qué se le asigna a todas las cosas, puesto que solamente, en vistas de que no todo tiene la propiedad *P*, tiene sentido la afirmación de que un objeto *a* es *P.* A mayor extensión de un concepto menor es su contenido y viceversa: "No es fácil imaginar cómo llegaría el lenguaje a crear un calificativo que no pudiera servir en absoluto para determinar con mayor precisión un objeto" (Frege, 1996, p. 75). Al respecto, me parece importante remarcar la superposición de planos que suponen estas apreciaciones, porque una cosa es si los objetos —así sea todos— tienen o no una propiedad y otra es el carácter informativo que tiene o no un término del lenguaje. En vistas de que Frege expresa en *Los fundamentos de la aritmética* que las propiedades de las cosas no dependen ontológicamente de las categorizaciones del lenguaje, me parece débil, en el contexto de su filosofía, este planteo.

Retornemos a los comentarios fregeanos acerca de los múltiples sentidos que tiene el vocablo "unidad" en Euclides. El filósofo advertía la trampa que envuelve aquella que toma diferentes acepciones. Efectivamente, en la primera definición se considera que la unidad —o uno— es una propiedad de las cosas que son contadas, y en la segunda se toma a las unidades como los objetos que tienen esas propiedades. Por ello, en el primer caso funciona como una palabra para concepto y en el segundo como nombre. Tait (1993) sostiene que esta observación es trivial y frívola porque, así como se usa la palabra "hombre" para hacer referencia a veces a una propiedad y a veces a los hombres, las cosas pueden llamarse "uno" después de la elección de la unidad del mismo modo que los hombres pueden llamarse "hombre": "Es a causa de que Frege no entiende que 'uno' es un *nombre común* que se aplica a todas las unidades (una vez que la unidad ha sido elegida) que él malentiende a Euclides" (Tait, 1993, p. 33). Dicho sea de paso, esto es lo que sostenía Husserl en *Filosofía de la aritmética*. El filósofo estaba al tanto de la posición de Frege de que si se designa con el signo "1" a diferentes cosas se comete el error de dar el mismo signo a entidades diferentes. Al respecto, le responde:

> Sin embargo, cometemos este error con cada aplicación de los nombres generales. Cuando llamamos a Juan, Pedro, etc., hombre, tenemos el mismo caso de "notación errónea" que aquella en virtud de la cual, al contar, escribimos 1 para cada objeto que ha de contarse (Husserl, 2003, pp. 155-156).

Retomando la afirmación de Tait, cabe decir que en este punto disiento con el intérprete, pues no tiene en cuenta múltiples aspectos del pensamiento fregeano:

a) Bien puede decir Tait que los signos numéricos son nombres comunes, pero no que la observación fregeana es frívola, porque la misma se enmarca en una serie de consideraciones que tienen mucho peso en el pensamiento de Frege. Recuérdese que este distingue tajantemente entre los nombres y las palabras para concepto, las primeras refieren a objetos, las segundas a conceptos. Las propiedades son expresadas por palabras para concepto, no por nombres. Aquello que es nombre no es palabra para concepto –y viceversa–, así como los objetos no son conceptos y, por ende, propiedades –y viceversa–. Por ello, no resulta superficial –como expresa el intérprete– la crítica del doble trato de las "unidades", tanto como objetos como propiedades. En el contexto de la filosofía fregeana no pueden ser ambas cosas.

b) Frege no acepta la existencia de "nombres comunes" porque no hay nombres de muchas cosas. Lo que tradicionalmente se conoce como "nombre común" es para él una palabra para concepto. Si el signo numérico "1" fuese una palabra para concepto no aludiría a objetos –como sostiene Tait– sino a un concepto.

c) El signo "1" no es una palabra para concepto, ni mucho menos un nombre común en su acepción clásica, sino el nombre de un objeto: el número 1. La razón a la que apela Frege es lingüística, se dice "el número uno", no hay posibilidad del plural (1996). La presencia del artículo determinado en una expresión es un indicador de que esta funciona como nombre que refiere a un objeto.[16] Así pues, no hay

[16] Por tanto, idénticas consideraciones valen para los otros números. Se dice "el número dos", "el número tres", etc.

tal cosa como el concepto o la propiedad denotada por "uno". Que "uno" no es una palabra para concepto ni refiere a una propiedad puede verse en el hecho de que mientras se pueden reunir "Tales era sabio" y "Solón era un sabio" en "Tales y Solón eran sabios", no se puede decir "Tales y Solón eran uno".

La misma razón que le lleva a sostener que el número 1 no es un concepto es la que le hace afirmar que la expresión "unidad" es una palabra para concepto: admite el plural, es posible hablar de "unidades". Para Frege (1996) —a diferencia de toda la tradición euclidiana de la que Locke es parte—, el número 1 y la unidad son cosas diferentes. "Número 1" y "unidad" no son términos intercambiables. En lugar de decir que la unidad es el número 1, el filósofo explica que a la unidad solo la puede constituir un concepto que determine qué cae bajo él y que no, y que no permita particiones arbitrarias. Así, por ejemplo, el concepto "letras de la palabra 'dos'" delimita a la "d" frente a la "o" y a esta frente a la "s"; en cambio, el concepto "sílabas de la palabra 'dos'" toma a la palabra "dos" como un todo.[17]

La creencia en la simultánea igualdad y distinción de las unidades viene dada —explica— por un doble uso de la palabra "unidad". Así, por ejemplo, dado el enunciado "Júpiter tiene cuatro lunas", la unidad es "luna de Júpiter", pues la unidad está determinada por el concepto bajo el que se cuenta.[18] Bajo el concepto "luna de Júpiter" caen Ío, Europa, Ganímedes y Calisto. Estos son iguales en tanto caen bajo el mismo concepto, pero considerados en tanto objetos son distintos.

2. C. *El ataque al número como representación abstracta*

En el aparatado anterior expresé que —en vista de que no existen objetos iguales— muchos de quienes creen en la existencia de unidades idénticas suponen que se llega a ellas a través de un proceso abstractivo. Este sería el camino que lleva a la idea de unidad o 1 y, por ende, a la de todos los números. Recuérdese que Locke abre el camino a esta interpretación, aunque no lo afirme explícitamente.

---

17 Conceptos como "rojo", en cambio, no admiten la división en unidades. No es posible contar los "rojos"; aunque sí, por ejemplo, las manzanas rojas.

18 "Unidad con relación a un número finito solamente la puede constituir un concepto tal que delimite claramente lo que cae bajo él" (Frege, 1996, p. 96).

El abordaje de la discusión de Frege con los defensores de la abstracción es complejo por diversas razones, por un lado, las opiniones de quienes defienden el carácter abstracto del número no concuerdan entre sí en todos sus aspectos y, por otro, la crítica fregeana –que tiene, a su vez, matices según la época– se adecúa en ocasiones a las tesis de sus oponentes y en otras no. A todo esto deben sumarse las diferentes interpretaciones sobre qué es lo que realmente sostienen los pensadores con quienes entra en polémica. De algunas de estas cuestiones daré cuenta en este apartado; sin embargo, no se debe perder de vista que el objetivo de esta sección es analizar la crítica a la idea de que se obtiene el número a través de la abstracción, así como a la de la abstracción en general, y no la interpretación de los autores con los que Frege polemiza.

Comenzaré el desarrollo de la crítica fregeana a la concepción del número como entidad abstracta mostrando las posiciones de importantes matemáticos del siglo XIX con los que Frege debate.

Jevons (en Frege, 1996) sostiene:

> No habrá gran dificultad ahora en formar una noción clara de la abstracción numérica. Ésta consiste en abstraer el carácter de la diferencia que origina la pluralidad, reteniendo solamente el hecho. Cuando hablo de tres hombres, no es necesario que especifique cada vez los rasgos por los que se puede distinguir a cada uno de ellos. Estos rasgos deben existir si se trata realmente de tres hombres y no de uno y el mismo, y, al hablar de ellos en plural, implico la existencia de las diferencias requeridas. El número abstracto, entonces, es la forma vacía de la diferencia (p. 87).

Husserl (2003), a su vez, expresa que se abstrae, a partir de los miembros de las multiplicidades concretas, el particular modo en que están formados:

> cuando nos representamos el concepto general de la multiplicidad siempre tenemos en la mente la intuición de alguna multiplicidad concreta por medio de la cual abstraemos el concepto general. ¿De qué manera, entonces, procede esta abstracción? Como se ha establecido, la abstracción total de las peculiaridades de los

> contenidos individuales se debe efectuar conservando, sin embargo, su combinación (p. 83).

Similares ideas aparecen en Cantor (1955) y Dedekind (1998), pero Frege ataca estas concepciones. La crítica a Jevons aparece en el apartado 44 de *Los fundamentos de la aritmética*. Respecto a la idea de que el número es la forma abstracta de la diferencia, realiza tres observaciones:

1) Hay dos posibilidades: o bien se abstraen primero las propiedades de las cosas para reunirlas luego en un todo, o bien se tiene primero el todo y luego se abstraen las propiedades particularizadoras. Por la primera vía no se llega a fijar las diferencias de los objetos; además, si lo obtenido fuese absolutamente igual, no se podría formar una pluralidad. Entonces, el camino debe ser el segundo; no obstante, de esta forma no se podría llegar a un número elevado porque, por ejemplo, no se puede concebir 10.000 diferencias y fijar la presencia de cada una de ellas en la conciencia.

2) No se aprecia −señala Frege− en qué sentido un enunciado numérico expresa una diferencia. Por ejemplo, "La tierra posee dos polos" no es equivalente a "El Polo Norte es distinto del Polo Sur" porque bien podría aceptarse lo primero sin aceptar lo segundo y viceversa.

Al respecto, me gustaría remarcar que es verdad lo que dice Frege y que son enunciados distintos: "La tierra posee dos polos" y "El Polo Norte es distinto del Polo Sur". Ello se muestra en las correspondientes notaciones en un lenguaje de primer orden con identidad, "$(\exists x)\ (\exists y)\{Rxt\ .\ Ryt\ .\ x \neq y.\ (z)\ [Rzt \supset (z = x \vee z = y)]\}$"[19] para el primer caso y "$n \neq s$" para el segundo. La primera fórmula contiene funciones proposicionales cuantificadas y la segunda dos constantes individuales que no aparecen en el primer caso. Pese a ello, debe observarse que la presentación formal del primer enunciado muestra que Jevons no estaba del todo desacertado en su intuición, pues contiene dos variables de individuo −x, y− que no pueden reemplazarse por constantes individuales que designen al mismo objeto − pues $x \neq y$−. Las variables y la negación de la identidad muestran la estructura formal, vacía, de una diferencia; sin embargo, como se verá a continuación, la crítica

[19] "Rxt" debe leerse como "x es un polo de la Tierra".

de Frege es plenamente aplicable cuando se habla de los números menores que dos.

3) Lo que dice Jevons, afirma Frege, no es aplicable ni al cero ni al uno. Efectivamente, piénsese en dos enunciados numéricos que los involucren: "la luna tiene cero satélites" y "la Tierra tiene un satélite", expresados en primer orden son $\sim (\exists x)\ Sxl$[20] y $(\exists x)\ [Sxt\ .\ (y)\ (Syt \supset y = x)]$. Evidentemente, en ningún caso se expresa diferencia alguna:

> Por medio de la abstracción se obtienen ciertamente los conceptos: satélite de la tierra, satélite de un planeta, cuerpo, objeto; pero en esta serie no se da con el 1; pues no es un concepto bajo el que pudiera caer la luna. En el caso del 0, ni siquiera se tiene un objeto a partir del cual realizar la abstracción (Frege, 1996, pp. 88-89).

En *Los fundamentos de la aritmética* Frege (1996) sostiene que en el proceso de abstracción las cosas no pierden sus peculiaridades:

> Si [...] al considerar un gato blanco y un gato negro, prescindo de las propiedades por las que ellos se distinguen, obtengo quizá el concepto "gato". Si ahora los pongo a ambos bajo este concepto y los llamo unidades, el gato blanco sigue siendo blanco y el negro sigue siendo negro (p. 79).

Dummett (1991) expresa que —por afirmaciones como las que he citado— ciertos intérpretes como Baker y Haker sostienen que Frege es uno de los principales defensores del abstraccionismo. Dummett se opone a esta lectura y señala que —a fin de ver cuál es la posición que tiene el filósofo sobre esta cuestión— se deben considerar tres tesis sobre la abstracción, cada una de las cuales es más fuerte que la que le precede, a saber: 1) Es posible llegar a un concepto radicalmente nuevo contemplando un número de objetos diversos que caen bajo él. 2) La obtención del nuevo concepto en el caso (1) se efectúa a partir de la abstracción las propiedades diferenciadoras de los objetos en cuestión, es decir, desviando la atención de ellos. 3) La operación de abstracción referida en (2) puede también generar construcciones

[20] No existe, por lo menos, un x tal que x sea satélite de la luna.

mentales abstractas o estructuras de objetos que carecen de todas aquellas propiedades que poseen aquellos objetos a partir de los cuales son abstraídas.

El intérprete sostiene que de la lectura de *Los fundamentos de la aritmética* se desprende que Frege acepta (1) y (2), pues dice explícitamente que observando dos gatos, uno blanco y otro negro, se puede arribar al concepto de gato; sin embargo, estas tesis no desempeñan ningún papel ni en la obra del filósofo ni en sus argumentos. Lo que Frege efectivamente combate es la tesis (3), esta no solo expresa que la mente es capaz de llegar a un concepto nuevo al no reparar en ciertas características de los objetos, sino que puede crear —mediante la abstracción— entidades nuevas y autónomas, como lo serían los objetos matemáticos. Para Frege, por medio de la abstracción no se produce ni se transforma nada. La mente no produce conjuntos ni números: "Por procedimientos meramente conceptuales no se consigue hacer iguales cosas distintas; pero si se consiguiese, ya no se tendrían cosas, sino sólo una cosa" (Frege, 1996, p. 79). Esta idea ataca el nudo mismo de la afirmación de que el número es una entidad que deviene tras un proceso de abstracción.

Dummett (1991) expresa que entre quienes creen que la mente tiene poderes para crear un objeto o sistema de objetos a partir de la abstracción están Cantor, Dedekind y Husserl; sin embargo, la visión del intérprete sobre Husserl es, como mínimo, muy cuestionable. Probablemente Dummett esté condicionado por la naturaleza de los comentarios que realiza Frege en la crítica al libro de Husserl. Allí se explaya sobre la abstracción más que en *Los fundamentos de la aritmética*, además tiene apreciaciones de mayor dureza, no exentas de ironía.

En la reseña, el filósofo sostiene que llama *ingenua* a toda concepción que no considere que las atribuciones numéricas sean o bien de conceptos o bien de extensiones de conceptos. Entre las perspectivas que considera cándidas están las que analizan el número como un montón de cosas con todas sus peculiaridades y las que señalan que es una propiedad de un montón que solo puede obtenerse *limpiando* a las cosas de sus rasgos definitorios. En relación a esto expresa:

> el intento presente pertenece a aquéllos que proceden a practicar esta limpieza en el barreño de lavar psicológico. Éste ofrece la

> ventaja de que las cosas adoptan en él una muy peculiar flexibilidad, dejan de chocar fuertemente entre sí en el espacio y abandonan muchas peculiaridades y diferencias incómodas. La mezcla, ahora tan en boga, de psicología y lógica proporciona una excelente lejía para este fin. En primer lugar, todo va a ser representación. Las referencias de las palabras son representaciones. […] Puesto que ahora todo es representación, *podemos* cambiar fácilmente los objetos fijando y desviando nuestra atención de ellos. Lo último es especialmente efectivo. Prestamos menos atención a una propiedad y ésta desaparece. Al dejar desaparecer una característica tras otra, obtenemos conceptos cada vez más abstractos. Por consiguiente, los conceptos son también representaciones, sólo que menos completas que los objetos; tienen todavía propiedades de éstos de las que no se ha hecho abstracción […] Supongamos, por ejemplo, que, ante nosotros, están sentados uno junto al otro, un gato negro y uno blanco. No prestamos atención a sus colores: se convierten en incoloros, pero aún están sentados uno junto al otro. No prestamos atención a su postura: ya no están sentados sin que, con todo, hayan adoptado otra postura; sin embargo, cada uno sigue todavía en su sitio. Dejemos de prestar atención al lugar que ocupan; ya no ocuparán ningún lugar, pero siguen estando totalmente separados. De este modo hemos obtenido quizás de cada caso un concepto general de gato. Todo objeto se convierte, por aplicación progresiva de este procedimiento en un espectro cada vez más exangüe. Al final, obtenemos de cada objeto un algo que carece completamente de restricciones por lo que respecta a su contenido; pero el algo que se ha obtenido de un objeto se diferencia, con todo, de lo que se ha obtenido de otro objeto, aunque no es fácil decir cómo (Valdés Villanueva, 1998, pp. 143-144).

Puede verse un tratamiento irónico y despectivo de la abstracción, la que es descripta en términos de un proceso de limpieza de los objetos. Esta idea vuelve a aparecer cuando Frege expresa que la inatención a ciertas propiedades es como una lejía muy fuerte que no se puede usar muy concentrada, pues puede disolver todo, ni muy diluida porque no se realizan los cambios suficientes, es decir, se corre el riesgo de prescindir de todo y no quedarse con ningún concepto o con un concepto más general que el deseado o, por el contrario, es posible deshacerse de menos propiedades que las que son necesarias y tampoco tener el concepto buscado. Se requiere –expresa con sarcasmo– del grado de dilución justo, al que él no ha llegado.

Esta descripción de la abstracción en una reseña del libro de Husserl puede llevar a pensar que esta era la posición de aquel. Quizá por ello Dummett (1991) sostenga que, para el autor de *Filosofía de la aritmética*, se crean objetos matemáticos. Ortiz Hill (2000) señala que la descripción de la abstracción dada por Frege es una caricaturización de Husserl, este último sostiene que la abstracción numérica es un procedimiento que se da al contar de modo tal que no se tienen en cuenta las propiedades particulares de los objetos. Anticipándose a críticas como las que se observan en la reseña fregeana, Husserl (2003) sostiene: "Aquello[21] no tiene absolutamente el efecto de hacer que los contenidos y las relaciones que se obtienen entre ellos desaparezcan" (p. 83). De hecho, el propio Frege reconoce que esta es la posición de Husserl. En su descripción del proceso abstractivo como creador de entidades indica que implica, además de un conjunto de manzanas, un conjunto de unidades puras; sin embargo, el propio Husserl niega esta posibilidad. A criterio de Ortiz Hill, Frege habría escrito la reseña del libro con el real propósito de atacar las posiciones abstraccionistas de Cantor.

Volvamos a la concepción de Frege sobre la abstracción. Puede advertirse que el ejemplo del gato blanco y el gato negro no recibe la misma consideración en *Los fundamentos de la aritmética* que en la recensión del libro husserliano. En el primero expresa que –si bien es verdad que observando dos gatos de diferentes colores no se alcanza el concepto de dos– sí se obtiene el concepto de gato sin que por ello los gatos cambien. En el segundo texto indica que un proceso abstractivo implicaría la transformación de objetos, lo cual es imposible. Por ello, Ortiz Hill (2000) señala irónicamente: "En los *fundamentos de la aritmética* Frege había establecido explícitamente que en el proceso de abstracción las cosas no cambian de características […] Sin embargo, diez años después no se puede imaginar que la abstracción no cambie objetos" (p. 97).

[21] La abstracción.

En la reseña del libro de Husserl, Frege señala que colocar objetos bajo un concepto no es abstraer el concepto de los objetos, sino reconocer una relación existente. Los conceptos son objetivos, también los objetos, de allí que la relación entre ellos no esté sujeta a procesos psíquicos. Estas consideraciones hacen que –según Dummett (1991)– el filósofo rechace, en este contexto, también la tesis (2) del abstraccionismo. Por ello, no puede señalarse, que Frege adhiera a posiciones defensoras de la abstracción, como indican Baker y Haker.

Consideraciones finales

Como se ha podido apreciar, el análisis que Locke realiza sobre los números en términos de una representación consistente en la idea de unidad –equiparable a la idea de número 1– o en la multiplicidad de ellas ha tenido muchas influencias en el siglo XIX y un enorme desarrollo. El gran eco de estas ideas obedece –en gran medida– al auge de posiciones que consideraban que todas las disciplinas se subsumen a la psicología. Si la aritmética se reduce a la psicología, el destino del número no puede ser otro que el de ser una representación sensible o abstracta. La concepción de que el número es una reunión de unidades –cada una de ellas equiparable con el 1– venía ya de los griegos, aunque lo específico de Locke es el análisis de la unidad como representación. Así pues, Frege tiene un doble frente, por un lado pretende mostrar por qué el número no es una representación, ni el producto de un proceso en el que intervienen las facultades psíquicas. Con ello combate al psicologismo, primer paso para encontrar una fundamentación de la aritmética libre de cualquier connotación subjetiva; por otro entra en debate con la tradición euclidiana –de la que se hizo cargo el empirismo de Locke– al negar que el número sea un conjunto o multiplicidad de unidades entendidas como "unos".

Los argumentos empleados han sido –como he ido mostrando– de diversa índole. Lo que me interesa destacar particularmente es la cantidad de consideraciones de naturaleza lingüística que realiza:

1) Los números no son representaciones porque estas no cambian con la introducción de un numeral en una expresión.

2) Se piensa que los números son representaciones porque se busca equivocadamente el significado de las palabras y, por tanto, de los numerales, aisladamente y no en el contexto de las proposiciones.

3) Los números no son multiplicidades expresables a través de "y" por lo que ella expresa.

4) La idea de que un número es un conjunto de unidades o "unos" deviene de una trampa lingüística: el doble uso de la palabra "unidad", como nombre y como palabra para concepto.

5) El número 1 se expresa a través de un artículo determinado, por ello, se trata de una sola entidad y no puede haber una multiplicidad de "unos".

6) No se puede equiparar al número 1 con una unidad porque la expresión "unidad" sí admite el plural.

7) Del análisis de las oraciones que contienen numerales no se desprende que ellos expresen la forma vacía de la diferencia, una de las variantes a través de las cuales se entiende la abstracción.

Así pues, son certeras las palabras de Dummett (1991) al atribuirle la responsabilidad de haber realizado el tan nombrado "giro lingüístico" en la Filosofía. Aunque no de modo exclusivo, el análisis de la naturaleza de los objetos y proposiciones matemáticas, y su crítica a las tesis emanadas de la filosofía lockeana se realizan metiendo las manos en las entrañas del lenguaje, recorriendo sus múltiples vericuetos.

Bibliografía

01. Barceló Aspeitia, A. A. (2005). "El reto epistemológico del naturalismo". Recuperado de http://bit.ly/2ghPdC2.
02. Cantor, G. (1955). *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Nueva York: Dover Publications.
03. Dedekind, J. (1998). "¿Qué son y qué significan los números?", en José Ferreirós (ed.). *¿Qué son y qué significan los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
04. Dummett, M. (1991). *Frege. Philosophy of Mathematics.* Harvard: Harvard University Press.
05. Euclides. *Elementos.* Recuperado de http://bit.ly/2f5oGWQ.
06. Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über der Begriff der Zahl.* Breslau: Wilhelm Koebner.

07. Frege, G. (1964). *The Basic Laws of Arithmetic. Exposition of the System.* Los Ángeles: University of California Press.
08. Frege, G. (1996). "Los fundamentos de la aritmética", en Jesús Mosterín (ed.). *Escritos filosóficos*. Barcelona: Crítica.
09. Husserl, E. (2003). *Philosophy of Arithmetic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
10. Kenny, A. (1995). *Introducción a Frege*. Madrid: Cátedra.
11. Locke, John (1956). *Ensayo sobre el entendimiento humano.* México: Fondo de Cultura Económica.
12. Ortiz Hill, C. (2000). "Frege's Attack on Husserl and Cantor", en Claire Ortiz Hill y Guillermo Rosado Haddock (eds.). *Husserl or Frege? Meaning, Objectity and Mathematics*. Chicago y La Salle: Open Court.
13. Risco, M. M. (2012). *Intencionalidad y significado en la Primera Investigación Lógica de Husserl*. Tucumán: Departamento de Publicaciones de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNT.
14. Robles, J. A. (1993). *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. México: Universidad Autónoma de México.
15. Valdés Villanueva, L. M. (ed.) (1998). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica.* Madrid: Tecnos.
16. Tait, W. (1993). "Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number". Recuperado de http://bit.ly/2gitIBF.

Andrés Fernando Stisman. Doctor en Humanidades (Área Filosofía) por la Universidad Nacional de Tucumán. Ha escrito capítulos de libros y publicado artículos en revistas nacionales e internacionales. Sus líneas de investigación son los tópicos relacionados con la filosofía del lenguaje y la filosofía de la aritmética. Ha realizado estancias de investigación en universidades extranjeras. Actualmente es catedrático en la Universidad Nacional de Tucumán.